

Abschlussprüfung Sommer 2008

Mathematisch-technischer Softwareentwickler
Mathematisch-technische Softwareentwicklerin
0000

1 Mathematische Modelle und Methoden

6 Aufgabe
135 Minuten Prüfungszeit
100 Punkte

Vorbemerkung

Der vorliegende Aufgabensatz besteht aus insgesamt 6 Aufgaben zu je 20 Punkten.

In der Prüfung zu bearbeiten sind 5 Aufgaben, die vom Prüfungsteilnehmer frei gewählt werden können.

Die nicht bearbeitete Aufgabe ist durch Streichung des Aufgabentextes im Aufgabensatz und Auf dem Deckblatt mit dem Vermerk „Nicht bearbeitete Aufgabe: Nr... „ an Stelle einer Lösungsniederschrift deutlich zu kennzeichnen. Erfolgt eine solche Kennzeichnung nicht oder nicht eindeutig, gilt die 6. Aufgabe als nicht bearbeitet.

Ein nicht programmierter, netzunabhängiger, nicht grafikfähiger Taschenrechner ohne Kommunikationsmöglichkeit mit Dritten ist als Hilfsmittel zugelassen.

Nicht bearbeitete Aufgabe ist Nr.

1. Aufgabe (20 Punkte) [Lineare Algebra]

Paul und Mary kaufen beim Bäcker ein.

Paul kauft für 17,00 € 4 Baguette, 8 Müslibrötchen und 2 Schwarzbrote.

Mary kauft für 20,50 € 2 Baguette, 12 Müslibrötchen und 3 Schwarzbrote.

- a) Formulieren Sie ein geeignetes mathematisches Modell zur Ermittlung der Stückpreise.
- b) Wenden Sie dieses mathematische Modell zur Lösung an.
- c) Ermitteln Sie
 - ca) die möglichen Preisspannen der einzelnen Artikel.
 - cb) den Mindest- und den Höchstpreis für den Einkauf von 1 Baguette, 2 Müslibrötchen und 3 Schwarzbrot.

2. Aufgabe (20 Punkte) [Diskrete Mathematik/Kombinatorik]

Ein Parallelrechner besteht aus zehn Knoten; jeder Knoten kann mit jedem anderen Informationen austauschen. Beim Systemstart sollen alle möglichen Verbindungen getestet werden, wobei die Richtung der Verbindung keine Rolle spielt. Zum Test werden immer zwei Knoten miteinander verbunden.

- a) Geben Sie ein passendes Urnenmodell für die Auswahl von je zwei Knoten an.
- b) Ermitteln Sie
 - ba) die Anzahl der zu testenden Verbindungen.
 - bb) die gesamte Testzeit, wenn die Tests
 - bba) nacheinander durchgeführt werden. (Jeder Test dauert 10 Millisekunden. Zwischen zwei Tests sind 2 Mikrosekunden Pause nötig.).
 - bbb) zwischen Verbindungen, die nicht dieselben Knoten betreffen, parallel laufen können (ansonsten dieselbe Zeit dauern).

3. Aufgabe (20 Punkte) [Lineare Algebra/Analytische Geometrie]

Bezüglich eines festen Bezugspunktes (Nullpunkt) und eines (x,y,z) -Koordinatensystems im Raum ergaben sich durch exakte Messung folgende Punkte, zwischen denen eine Verbindung gezogen werden soll: $(6,3,7)$ und $(0,9,4)$.

- a) Ermitteln Sie die Mindestlänge der Verbindung, wenn
 - aa) die Punkte direkt verbunden werden.
 - ab) die Verbindung nur durch drei parallel zu den Koordinatenachsen liegende Leitungen laufen kann.
- b) Nennen Sie alle Verbindungsmöglichkeiten zu ab) durch Angabe der Zwischenpunkte.
- c) Fertigen Sie die Skizze einer möglichen Verbindung von ab).

4. Aufgabe (20 Punkte) [Analysis]

Es soll ein Unterprogramm/eine Methode zur Berechnung der Formel

$$2 * \pi * \exp(x - 3)$$

im Intervall $[1,5]$ geschrieben werden.

Bearbeiten Sie die folgenden, die Programmierung vorbereitenden Teilschritte:

- a) Verwenden Sie eine inverse trigonometrische Funktion (Arkusfunktion) zur Bestimmung von π .
- b) Realisieren Sie die Exponentialfunktion für beliebiges x durch eine Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ bis zum Grad 9.
- c) Berechnen Sie die Näherung für $\exp(x-3)$ an den Randpunkten des Intervalls $[1,5]$ nach b).
- d) Ziel ist es, eine Abschätzung für die Genauigkeit der gefundenen Reihenentwicklung zu ermitteln. Wieso genügt es, die Randpunkte zu betrachten, wenn man die Genauigkeit für alle $x \in [1,5]$ abschätzen soll?
- e) Geben Sie diese Abschätzung für die beiden Randpunkte an. Hinweis: Es gilt $2,71 < e < 2,72$.

5. Aufgabe (20 Punkte) [Integralrechnung]

Bei der Übertragung einer größeren Datei über eine DSL-Leitung werden zu äquidistanten Zeitpunkten folgende Übertragungsgeschwindigkeiten in Kilobyte pro Sekunde beobachtet:

| | | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-------|-----|----|------|------|
| t [sec] | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| v(t) [KB/sec] | 400 | 200 | 133.3 | 100 | 80 | 66.7 | 57.1 |

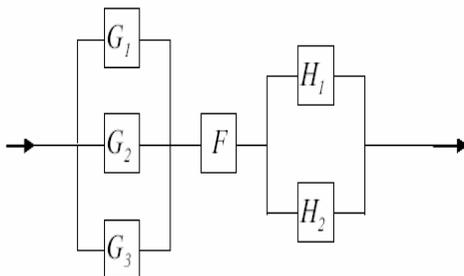
- a) Tragen Sie die Messwerte in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
- b) Welche Datenmenge wird in der Beobachtungszeit T von 35 Sekunden höchstens übertragen, wenn man annimmt, dass die Übertragungsgeschwindigkeit
- immer fünf Sekunden lang konstant bleibt.
 - innerhalb der fünf Sekunden zwischen zwei Messzeitpunkten linear abnimmt, dabei zum Schluss (bei T = 35) auf 50 absinkt.
- c) Es sei bekannt, dass die Daten und damit die Geschwindigkeit, durch eine Funktion vom Typ
- $$v(t) = \text{Konstante} / (5+t)$$
- gut beschrieben werden.
- „Lesen“ Sie die Konstante aus den Daten durch Einsetzen des Wertes für T = 15 Sekunden ab.
- d) Die Datenmenge (in Kilobyte), die bis zu einem Zeitpunkt T transferiert worden ist, kann man durch das bestimmte Integral von 0 bis T über v(t) berechnen.
- Ermitteln Sie damit
- wieviele Kilobyte während des gesamten Zeitraums (Endzeitpunkt T = 35 sec) übertragen werden.
 - die notwendige Zeit, um beim vorgegebenen Verhalten der Leitung eine Datei der Größe 1 Megabyte (1.024 Kilobyte) zu übertragen.

6. Aufgabe (20 Punkte) [Stochastik]

Die Firma „Schmitz und Söhne“ baut Maschinen aus verschiedenen Komponenten. Jede einzelne Komponente kann ausfallen; die jeweiligen Einzel-ausfallwahrscheinlichkeiten sind aufgrund jahrelanger Erfahrung bekannt.

Die Software-Entwicklungsabteilung soll ein Programm zur Zuverlässigkeitsberechnung der Maschinen erstellen. Zur Vorbereitung der Arbeiten sollen die folgenden mathematischen Aufgaben gelöst werden:

- a) Welche Regeln gelten für die Ausfallwahrscheinlichkeit von Maschinen, die aus
- zwei parallel geschalteten (gleichen oder verschiedenen) Komponenten (Maschine funktioniert, wenn mindestens eine Komponente funktioniert),
 - zwei in Serie geschalteten (gleichen oder verschiedenen) Komponenten (Maschine funktioniert, wenn alle Komponenten funktionieren) bestehen, wenn man von unabhängigen Ausfällen mit Wahrscheinlichkeit p1 und p2 ausgeht?
- b) Die folgende Abbildung zeigt eine schematische Darstellung einer Maschine aus sechs Komponenten; es gibt drei verschiedene Typen von Komponenten, die mit G, F und H bezeichnet sind.



Ein Ausfall dieser Typen innerhalb der nächsten 12 Monate ist für eine Komponente von G gleich 0.1, für eine Komponente F gleich 0.01 bzw. für eine Komponente von H gleich 0.05.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt das System aus?
- Welche Komponente würden Sie (parallel zu den gleichartigen) hinzufügen, um die Gesamtausfallwahrscheinlichkeit möglichst klein zu halten? Vergleichen Sie dazu die drei Möglichkeiten.